模块二 三角恒等变换

第 1 节 和差角、辅助角、二倍角公式（★★☆）

内容提要

和差角、辅助角、二倍角公式是三角函数的核心公式，本节涉及一些有关公式应用的基础题，让大家熟悉公式的简单应用，下面先梳理这些公式.

1．和差角公式

①$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

②$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

③$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

2．辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.

在辅助角公式中，若$a>0$，则$\varphi\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$；若$a<0$，可先提负号到外面，再用辅助角公式合并.

3．二倍角公式及其变形

①二倍角公式：$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

②降次公式：$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha$.

③升次公式：$1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$，$1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$，$1\pm\sin2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$，$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

典型例题

类型Ⅰ：正弦、余弦的和差角、二倍角公式的应用

【例 1】已知$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5}$，且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=$______.

解析：将$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$展开会出现$\cos\alpha$和$\sin\alpha$，故先由$\sin\alpha$求$\cos\alpha$，

因为$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5}$，且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt5}{5}$，

故$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{2\sqrt5}{5}\times\dfrac{\sqrt2}{2}-\dfrac{\sqrt5}{5}\times\dfrac{\sqrt2}{2}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

答案：$-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

【变式 1】已知$\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{1}{3}$，则$\sin2\alpha=$______.

解法 1：先尝试简单的思路，把所给条件展开，看它与要求的$\sin2\alpha$的联系，

$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

所以$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha=1+\sin2\alpha=\frac{2}{9}$，故$\sin2\alpha=-\frac{7}{9}$.

解法 2：给值求值问题，先探究角之间的关系，可将已知角换元以方便观察，把求值的角化为已知角，

设$t=\frac{\pi}{4}+\alpha$，则$\alpha=t-\frac{\pi}{4}$，且$\sin t=\frac{1}{3}$，所以$\sin2\alpha=\sin2(t-\frac{\pi}{4})=\sin(2t-\frac{\pi}{2})=-\cos2t=2\sin^2t-1=-\frac{7}{9}$.

答案：$-\frac{7}{9}$

【变式 2】（2022·新高考Ⅱ卷）若$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，则（　　）

（A）$\tan(\alpha+\beta)=1$　　（B）$\tan(\alpha+\beta)=-1$　　（C）$\tan(\alpha-\beta)=1$　　（D）$\tan(\alpha-\beta)=-1$

解法 1：先尝试简单的思路，直接将题干所给等式左右两侧都展开，看能否进一步变形，

由题意，$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)\sin\beta$，

整理得：$(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=0$，

此时恰好又凑成了正弦、余弦的差角公式，故再将其合并，

所以$\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，故$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-1$.

解法 2：注意到左侧的$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)$可以合并，故先将其合并，再看能否进一步变形，

$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})$，代入题干等式化简得：$\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$　①，

注意到右侧的两个角是$\alpha+\frac{\pi}{4}$和β，所以把左侧的$\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$调整为$(\alpha+\frac{\pi}{4})+\beta$，再展开看看，

又$\sin(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4})=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{4})+\beta]=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta+\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，

所以代入式①可得：$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta+\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$，

整理得：$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cos\beta-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta=0$，故$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta)=0$，

所以$\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta=k\pi$，从而$\alpha-\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，故$\tan(\alpha-\beta)=\tan(k\pi-\frac{\pi}{4})=\tan(-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$.

答案：D

【总结】当条件中有形如$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，$\sin(\alpha+\beta)$的多角混合三角等式时，常有两个考虑的方向，一是把括号拆开，观察它与目标之间的关联；二是寻求这些角与目标中的角的整体联系.

【变式 3】已知$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，则$\sin2\alpha=$______.

解析：若将所给两个等式展开，则不易进一步变形，故寻找角的关系，若看不出来，可换元，

设$\begin{cases}x=\alpha-\beta\\y=\alpha+\beta\end{cases}$，则$\cos x=\dfrac{12}{13}$，$\sin y=\dfrac{4}{5}$，且$2\alpha=x+y$，

所以$\sin 2\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ ①，

要求式①，还差 $\sin x$ 和 $\cos y$，可由同角三角函数关系来求，先分析 x 和 y 的范围，

因为$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，所以$0<x=\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{4}$，$0<y=\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$，

故$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-(\dfrac{12}{13})^2}=\dfrac{5}{13}$，$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-(\dfrac{4}{5})^2}=\dfrac{3}{5}$，

代入①得：$\sin 2\alpha=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}$.

答案：$\dfrac{63}{65}$

类型Ⅱ：正切的和差角、二倍角公式的应用

【例 2】若$\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{6}$，则$\tan\alpha=$_____.

解析：由题意，$\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1}{6}$，解得：$\tan\alpha=\dfrac{7}{5}$.

答案：$\dfrac{7}{5}$

【变式 1】已知$\tan\alpha=-2$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{7}$，则$\tan 2\beta$的值为_____.

解析：看到$\tan(\alpha+\beta)$，先尝试展开，由题意，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1}{7}$ ①，

已知$\tan\alpha$，我们发现代入上式可求出$\tan\beta$，进而用二倍角公式求$\tan 2\beta$，

将$\tan\alpha=-2$代入式①可得$\dfrac{-2+\tan\beta}{1+2\tan\beta}=\dfrac{1}{7}$，解得：$\tan\beta=3$，所以$\tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\dfrac{3}{4}$.

答案：$-\dfrac{3}{4}$

【变式 2】已知α，β均为锐角，$(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，则$\alpha+\beta=$（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$　（B）$\dfrac{2\pi}{3}$　（C）$\dfrac{3\pi}{4}$　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

解析：先展开等式观察形式，由题意，$(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=1-\sqrt{3}(\tan\alpha+\tan\beta)+3\tan\alpha\tan\beta=4$，

上式中有$\tan\alpha+\tan\beta$、$\tan\alpha\tan\beta$这些结构，自然想到往$\tan(\alpha+\beta)$的展开式去变形，

所以$-(\tan\alpha+\tan\beta)=\sqrt{3}(1-\tan\alpha\tan\beta)$，从而$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\sqrt{3}$，故$\tan(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$，

又α，β都是锐角，所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，故$\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$.

答案：B

类型III：数字角三角代数式求值

【例 3】$\cos15^\circ\cos45^\circ-\cos75^\circ\sin45^\circ=$_____.

解析：看到这个式子，想到凑形式，把$\cos75^\circ$变成$\sin15^\circ$，就凑成了余弦和角公式，

$\cos15^\circ\cos45^\circ-\cos75^\circ\sin45^\circ=\cos15^\circ\cos45^\circ-\sin15^\circ\sin45^\circ=\cos(15^\circ+45^\circ)=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$.

答案：$\dfrac{1}{2}$

【变式 1】$\dfrac{\sin110^\circ\sin20^\circ}{\cos^2155^\circ-\sin^2155^\circ}=$_____.

解析：先看角之间的关联，$110^\circ=90^\circ+20^\circ$，所以分子诱导后可以利用正弦倍角公式合并，

原式$=\dfrac{\sin(90^\circ+20^\circ)\sin20^\circ}{\cos310^\circ}=\dfrac{\cos20^\circ\sin20^\circ}{\cos(360^\circ-50^\circ)}=\dfrac{\frac{1}{2}\sin40^\circ}{\cos50^\circ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin40^\circ}{\sin40^\circ}=\dfrac{1}{2}$.

答案：$\dfrac{1}{2}$

【变式 2】$\tan25^\circ+\tan35^\circ+\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ=$_____.

解析：看到$\tan25^\circ+\tan35^\circ$和$\tan25^\circ\tan35^\circ$，联想到$\tan(25^\circ+35^\circ)$，尝试正切和角公式找联系，

因为$\tan60^\circ=\tan(25^\circ+35^\circ)=\dfrac{\tan25^\circ+\tan35^\circ}{1-\tan25^\circ\tan35^\circ}=\sqrt{3}$，所以$\tan25^\circ+\tan35^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ$，

故$\tan25^\circ+\tan35^\circ+\sqrt{3}\tan25^\circ\tan35^\circ=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

【总结】给数字角求值，关键是寻找角的关系，如相加、相减为特殊角可考虑用和差角公式，相加、相减为90°，180°等可考虑用诱导公式，或者角度之间有 2 倍关系，可考虑用二倍角公式.

类型IV：辅助角公式的应用

【例 4】设$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，则$f(x)$的最大值为_____.

解析：先利用辅助角公式将解析式合并，$f(x)=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\sin(x+\varphi)=2\sin(x+\varphi)$，所以$f(x)_{\max}=2$.

答案：2

【反思】因为本题$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，所以不用去求辅助角φ的值，就能得出最大值. 接下来的两道题我

们还会看到必须求 φ 的情形下，φ 是特殊角和 φ 不是特殊角的处理方法.

【变式 1】设 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(0\le x\le\frac{2\pi}{3})$，则 $f(x)$ 的最大值为_____.

解析： 先利用辅助角公式将解析式合并，$f(x)=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\sin(x+\varphi)=2\sin(x+\varphi)$，

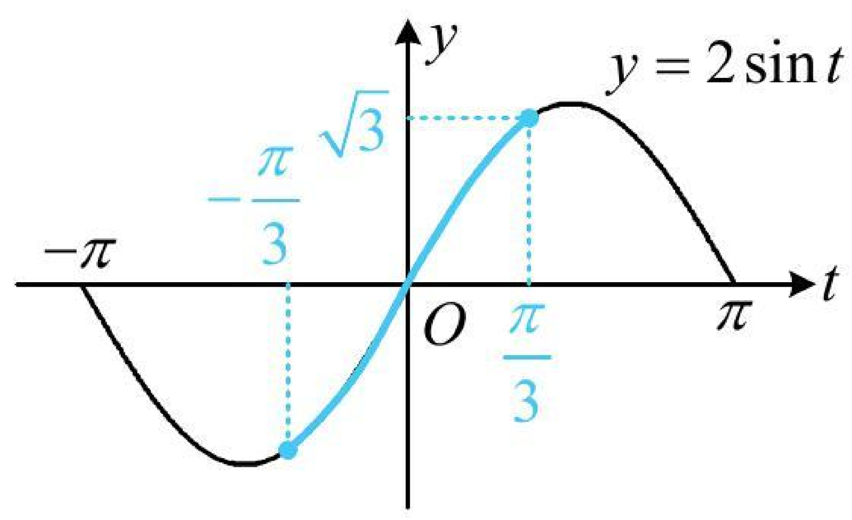
这里因为规定了 $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$，所以必须求出 φ 的值，因为 $\tan\varphi=-\sqrt{3}$ 且 $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

从而 $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，接下来可将 $x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=2\sin t$ 的图象来求最值，

设 $t=x-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\sin t$，当 $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$ 时，$-\frac{\pi}{3}\le t=x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$，

函数 $y=2\sin t$ 的部分图象如图所示，由图可知当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

答案： $\sqrt{3}$



【变式 2】已知 $f(x)=\sin x+2\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的值域为_____.

解析： 由题意，$f(x)=\sqrt{1^2+2^2}\sin(x+\varphi)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，为了求值域，可先将 $x+\varphi$ 换元成 t，

设 $t=x+\varphi$，则 $f(x)=\sqrt{5}\sin t$，因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi\le t\le\frac{\pi}{2}+\varphi$，

接下来必须研究辅助角 φ，才能求出 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi]$ 上的值域，

由辅助角公式知 $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 φ 在第一象限，不妨设 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，

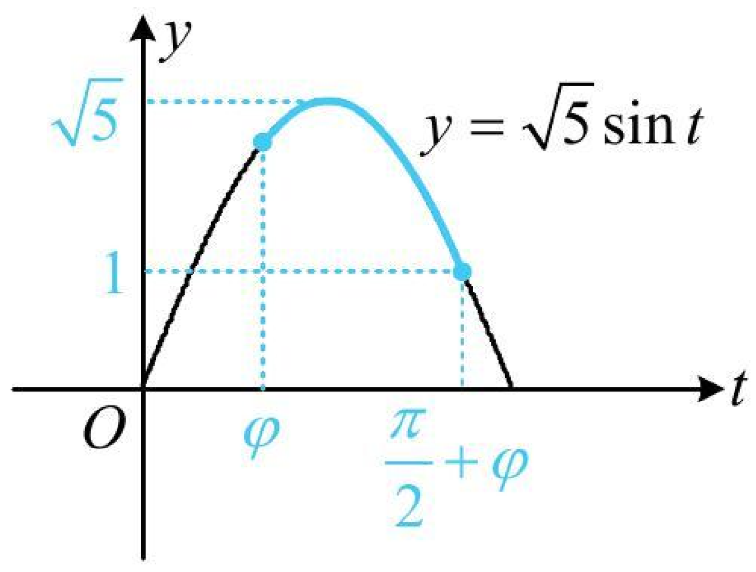
从而 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\frac{\pi}{2}]$ 上↗，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\varphi]$ 上↘，故当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{5}$；

对于最小值，根据单调性，只需比较左右端点谁更小即可，

又 $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}>\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi]$ 上的图象如图所示，

由图可知，当 $t=\frac{\pi}{2}+\varphi$ 时，$f(x)$ 取得最小值 1，故 $f(x)$ 的值域为 $[1,\sqrt{5}]$.

答案： $[1,\sqrt{5}]$



【反思】在辅助角公式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 中，若需要用到辅助角 φ，但 φ 又不是特殊角，则我们可以利用 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 来解决问题.

强化训练

1.（2023·江苏南京模拟·★）已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\alpha\sin 2\alpha=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{27}$　（B）$\dfrac{2}{27}$　（C）$\dfrac{8}{27}$　（D）$\dfrac{16}{27}$

.

2.（2022·安徽模拟·★★）若 α 是第二象限的角，且 $\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$______.

3.（2023·新高考Ⅱ卷·★★）已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=$（　　）

（A）$\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$　（B）$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{8}$　（C）$\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$　（D）$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

4.（2023·重庆模拟·★★）$\sin 20^\circ\sin 10^\circ-\cos 20^\circ\sin 80^\circ=$______.

5.（2021·全国乙卷·★★）$\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{5\pi}{12}=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6.（2022 • 黑龙江模拟 • ★★）数学家华罗庚倡导的“0.618 优选法”在各领域都有广泛应用，0.618 就是黄金分割比 $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，黄金分割比还可以表示成 $2\sin 18^{\circ}$，则 $\dfrac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^{\circ}-1}=$（　）

（A）4　（B）$\sqrt{5}+1$　（C）2　（D）$\sqrt{5}-1$

7.（2022 • 北京模拟 • ★★★）若 $\cos(\pi-\alpha)=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，则 β 可以为______.（写出一个满足条件的 β）

8.（2023 • 江苏常州模拟 • ★★★）已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{1}{4}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$_____.

9.（2022 • 江苏常州模拟 • ★★★）已知 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^{\circ}-\sin 1^{\circ})$，$b=\dfrac{1-\tan^2 22.5^{\circ}}{1+\tan^2 22.5^{\circ}}$，$c=\sin 22^{\circ}\cos 24^{\circ}+\cos 22^{\circ}\sin 24^{\circ}$，则 a，b，c 的大小关系为（　）

（A）$b>a>c$　（B）$c>b>a$　（C）$c>a>b$　（D）$b>c>a$

10.（★★★）设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$_____.